CUADERNILLO 1

EJEMPLAR DE CORTESÍA
NO APTO PARA LA VENTA

Nueva carpeta de Matemática III

Ruth Schaposchnik (coord.)
Luis Garaventa - Nora Legorburu
Patricia Rodas - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

1. Los números reales 3
Revisión inicial 4
Los números racionales 5
Las fracciones y sus significados 5
Fracciones y decimales 6
Operaciones con números racionales 7
Potenciación de números racionales 8
Propiedades de la potenciación 9
Radicación de números racionales 10
Módulo o valor absoluto 11
Ecuaciones con números racionales 12
Los números reales 14
Propiedades de la radicación 16
Potencias de exponente fraccionario 17
Aproximaciones y errores 18
En el mundo real 19
La historia y los decimales de π 19
Más sobre números irracionales: el número de oro 20
Más actividades 21
Autoevaluación 22

AIQUE

Este CUADERNILLO 1 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática III.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Diego F. Barros

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu
Valeria Machiunas

COPIEDICIÓN
Claudia García

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Claudia María Bevacqua Arbet
Alejandra Valente

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Silvana López

ILUSTRACIONES
Alejandra Lunik
Diego Molina
Diego Stigliano

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupi en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Francisco Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0060-2
Primera edición - Primera reimpresión

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Nueva carpeta de matemática III / Nora Legorburu...[et.al.]. ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
200 p. ; 28x20 cm.

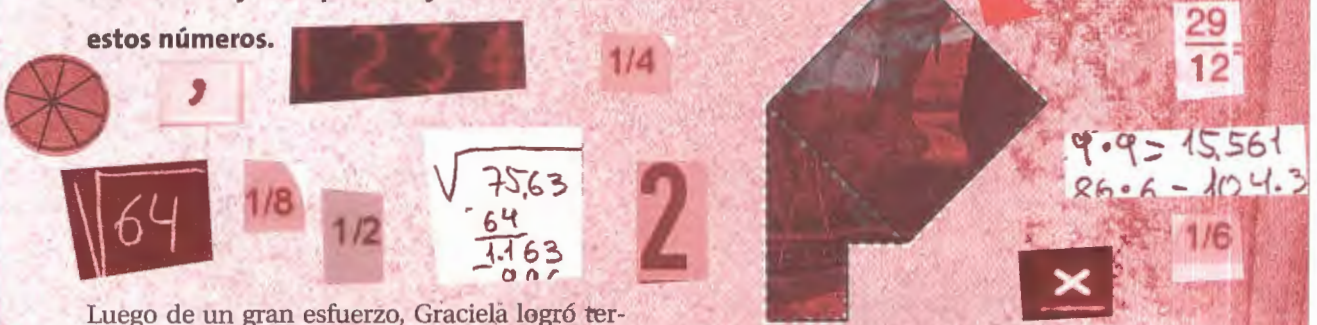
ISBN 978-987-06-0060-2

1. Matemática. I. Schaposchnik, Ruth, coord.

Esta edición se terminó de imprimir en Noviembre de 2008 en Latingráfica, Rocamora 4161, Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

1 LOS NÚMEROS REALES

En los comienzos de la actividad humana, surgió la necesidad de contar, y para ello se usaron los números naturales. Los problemas de las medidas se pudieron resolver con los números racionales, que permitieron fraccionar la unidad. Explorando la geometría, los matemáticos de los pueblos de la Antigüedad descubrieron que el campo numérico conocido era insuficiente. En la longitud de la circunferencia, en la diagonal del cuadrado, aparecieron los números *irracionales*. Mucho tiempo después, se llamó *reales* al conjunto que incluye a todos estos números.



Luego de un gran esfuerzo, Graciela logró terminar de armar el rompecabezas de la obra *La escuela de Atenas*, de Rafael (1483-1520).

Se quedó mirando la última pieza, que le llamaba mucho la atención: notó que estaba formada por dos cuadrados de diferentes tamaños unidos a un triángulo isósceles rectángulo.

● ¿Qué tipo de números se necesitan para expresar las medidas de los lados de cada uno de los cuadrados, si se toma como unidad un cateto del triángulo?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Resuelvan los siguientes cálculos.

a) $3 + (4 - 2) - 5\,(3 - 4) =$

.....

b) $5 - [2 - (5 - 6) + 1] - 2 =$

.....

c) $56 : (-3 - 2 \,.\, 2) - 4\,(3 - 5 \,.\, 3) =$

.....

d) $5{,}4 : 9 - 3 \,.\, 0{,}4 =$

.....

2 La altura de un rectángulo es 3 cm mayor que la base, y su perímetro es 26 cm.

a) Indiquen cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones sirven para calcular la longitud de la base b.

I. $2b + 2(b + 3) = 26$ II. $2b + b + 3 = 26$ III. $b \,.\, (b + 3) = 26$ IV. $2b + 3 = 13$

b) ¿Puede ser que la base mida 5 cm? ¿Por qué?

.....

3 Indiquen si algunos de estos valores son soluciones de las siguientes ecuaciones.

$-3{,}5$ $\quad -2 \quad$ $-\frac{3}{4}$ $\quad 2 \quad 5 \quad 13$

a) $2x + 5 - 3x + 2 = 4x - 3$

.....

.....

b) $4\,(2x + 5) = 3^3 - 13$

.....

.....

c) $3 - (2 + x) + 4x - 3 \,.\, 5 = -(1 - 2x)$

.....

.....

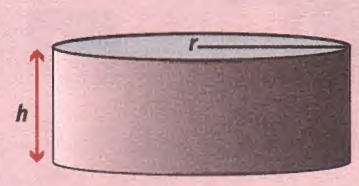
d) $8\,(3 - x) + 1 = -10x + 2 \,.\, 9$

.....

.....

4 Hallen el volumen y el área de los cuerpos. (Consideren $\pi = 3{,}14$).

a)



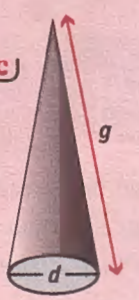
$r = 3$ cm

$h = \frac{3}{5}\,r$

b)

$r = 5$ cm

c)



$d = 10$ cm

$g = 3d$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los números racionales

Las fracciones y sus significados

5 Calculen.

a) El 25% de 840.

b) Las tres cuartas partes de 2284.

c) El número cuyo 50% es 75.

d) Qué fracción de 198 es 44.

e) Qué porcentaje de 140 es 20.

f) Qué porcentaje de 20 es 140.

6 Compré un departamento de $36 000: pago el 30% al firmar el contrato y el 20% en 6 cuotas iguales sin interés; luego, debo hacer un pago adicional del 15% y el resto lo pago en 60 cuotas con el 35% de incremento sobre lo que falta pagar. ¿Cuál es el valor aproximado de cada una de las 60 cuotas?

.....

.....

7 José tiene una empresa de alfombrados, y le encargaron alfombrar un salón de 630 m^2. A la mañana del primer día, alfombró $\frac{2}{7}$ del salón y a la tarde, $\frac{2}{5}$ del resto. Lo que falta lo dejará para el segundo día.

a) ¿Cuántos metros cuadrados le falta alfombrar?

b) ¿Qué fracción alfombró el primer día?

c) Si trabaja al mismo ritmo que el día anterior, ¿le alcanzará la mañana del segundo día para terminar con el trabajo?

Para leer y recordar

Recordemos, a través de algunos ejemplos, los distintos significados con los que podemos interpretar un número escrito en forma de fracción.

- ***Parte del todo:*** **"Me comí las dos quintas partes $\left(\frac{2}{5}\right)$ del chocolate" (dividí el chocolate en 5 partes iguales y me comí 2).**
- ***Relación entre cantidades:*** **"La relación entre las horas trabajadas por Juan y por Pedro es $\frac{5}{7}$" (cada cinco horas que trabaja Juan, Pedro trabaja 7).**
- ***Porcentaje:*** **"Pagué el 20% del precio total de un auto de $8000" (pagué $20 de cada $100 de los $8000 o pagué $\frac{20}{100}$ de $8000 = $\frac{\$8000 \cdot 20}{100}$ = $1600).**

Simplificación de fracciones

- **Si multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una *fracción equivalente* a la dada.**
- **El procedimiento que consiste en dividir el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número se llama *simplificación*.**
- **Cuando una fracción no se puede simplificar se llama *fracción irreducible*.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Fracciones y decimales

Para leer y recordar

Transformación de una expresión fraccionaria en una expresión decimal

Las fracciones pueden expresarse como números decimales, dividiendo el numerador por el denominador. Observen en los ejemplos tres situaciones que se pueden presentar.

$\frac{225}{5} = 45$	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	$\frac{2}{9} = 0{,}\widehat{2}$
Cuando el numerador es múltiplo del denominador, se obtiene un *número entero.*	Cuando se puede "terminar" la división llegando a un resto *cero,* se dice que la expresión decimal es *exacta.*	Cuando no se puede "terminar" la división y el resto se repite, se dice que la expresión decimal es *periódica.*

Transformación de una expresión decimal en una expresión fraccionaria

Expresiones decimales exactas

El número decimal sin la coma.

$$1{,}275 = \frac{1275}{1000}$$

Un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número original.

Expresiones periódicas puras

Número decimal sin la coma. Parte entera.

$$5{,}\widehat{76} = \frac{576 - 5}{99} = \frac{571}{99}$$

Un nueve por cada cifra decimal periódica.

Expresiones periódicas mixtas

El número sin la coma. Parte no periódica (entera y decimal).

$$7{,}9\widehat{56} = \frac{7956 - 79}{990} = \frac{7877}{990}$$

Un nueve por cada cifra decimal periódica. Un cero por cada cifra decimal no periódica.

8 Completen con la expresión que falte en cada caso.

Expresión fraccionaria	Expresión decimal
$\frac{5}{4}$	
$-\frac{3}{2}$	
	5,9
	$5{,}\widehat{9}$
	$0{,}1\widehat{89}$

Expresión fraccionaria	Expresión decimal
	−12,95
	$7{,}\widehat{896}$
$-\frac{10}{9}$	
$\frac{5}{6}$	
	$52{,}9\widehat{68}$

9 Completen con >, < o =.

a) $\frac{5}{8}$ ⬭ 0,6

b) $\frac{6}{9}$ ⬭ 0,66

c) $-\frac{7}{3}$ ⬭ −2

d) −0,9856 ⬭ $\frac{1256}{3257}$

e) $-2{,}\widehat{8}$ ⬭ $-\frac{13}{5}$

f) $\frac{1}{7}$ ⬭ $0{,}\widehat{14285}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Operaciones con números racionales

Para observar

Revisemos en algunos ejemplos cómo operamos con fracciones.

Multiplicación

$$-\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{-5 \cdot 3}{2 \cdot 4} = -\frac{15}{8}$$

División

$$-\frac{3}{2} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{(-3) \cdot (-5)}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}$$

Operaciones combinadas

$$\frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{4}{9} - \frac{14}{3} = \frac{4 - 42}{9} \quad (-14 \cdot 3) = -\frac{38}{9}$$

separamos en términos — resolvemos los términos — mcm (3; 9)

Cuando hay paréntesis

$$\frac{2}{3}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{1}{5}$$

resolvemos primero el paréntesis — simplificamos

10 Mariano y Juana tenían que resolver una suma de fracciones. Observen cómo lo hizo cada uno y, luego, respondan a las preguntas.

Mariano

$$-\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-9 + 10}{15} = \frac{1}{15}$$

Juana

$$-\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{1}{15}$$

¿Son correctas ambas resoluciones? ¿En qué se diferencian los procedimientos que empleó cada uno para resolver el cálculo?

.....

.....

11 Resuelvan los siguientes cálculos.

a) $-4 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} : \frac{7}{4} - 0{,}2 =$

.....

.....

b) $4 : \left(\frac{1}{3} + 2{,}5\right) - \frac{6}{5} \cdot \left(3 - \frac{4}{3}\right) =$

.....

.....

c) $0{,}\widehat{45} - \frac{7}{11} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left[\frac{1}{3} - \left(1 + \frac{7}{11}\right)\right] =$

.....

.....

d) $\frac{8}{21} + \left(-0{,}\widehat{5} - \frac{5}{3} : \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{7} =$

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Potenciación de números racionales

Para leer y recordar

- Si n es un número natural:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$ $\qquad a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

Ejemplos: $3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ factores}} = 243$ $\qquad 3^0 = 1$

exponente ← $a^n = p$ → potencia
base ←

- Potencia de un número fraccionario

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplos:

$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$ $\qquad \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{(-4)^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

- Potencia de exponente negativo

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $\quad (a \neq 0 \ ; b \neq 0)$

Ejemplos:

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

12 Calculen las siguientes potencias.

a) $5^3 =$ f) $10^6 =$ k) $(-5)^3 =$ p) $(-3)^5 =$

b) $(-3)^2 =$ g) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} =$ l) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} =$ q) $\left(-\frac{1}{25}\right)^0 =$

c) $-3^2 =$ h) $-\left(\frac{4}{3}\right)^3 =$ m) $-\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ r) $\frac{3}{5}^3 =$

d) $13^0 =$ i) $-3^{-1} =$ n) $-3^{-3} =$ s) $4^{-2} =$

e) $-3^0 =$ j) $(-1532)^1 =$ o) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} =$ t) $(-2)^{-3} =$

13 Observen los resultados de la actividad anterior y, luego, tachen las opciones incorrectas para que las siguientes oraciones resulten verdaderas.

a) El signo de una potencia de exponente par y base no nula
- es siempre positivo.
- depende del signo de la base.
- es a veces negativo.

b) Cuando la base de una potencia es negativa, la potencia
- es siempre negativa.
- es negativa sólo si el exponente es impar.
- siempre es positiva.

c) Las potencias de exponente impar y base no nula
- son siempre positivas.
- son siempre negativas.
- llevan el signo de la base.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducc

Propiedades de la potenciación

14 Completen los siguientes ejemplos.

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2$ ▭ = ▭

b) $2^{15} : 2^{12} = 2^{15-}$ ▭ = ▭

c) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2$ ▭ = ▭

d) $(3 \cdot 2)^2 = 3^2 \cdot 2^2 =$ ▭

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} =$ ▭

f) $(3^5 : 3^2)^2 = 3^{(5-2)\cdot}$ ▭ $= 3$ ▭ = ▭

15 Escriban cada una de las siguientes expresiones como una única potencia de 7.

a) $\frac{7^{12} \cdot 7^3 \cdot 7^8}{7 \cdot 7^2 \cdot 7^3} =$ .....

b) $\frac{(7^3 \cdot 7^{-5})^{-2}}{(7 \cdot 7^{-3})^3} =$ .....

c) $\left[\frac{7^3 : 7^{-3} \cdot 7^5}{(7^2)^3 : (7^2 \cdot 7^3)}\right]^{-3} =$ .....

16 Simplifiquen aplicando las propiedades de la potenciación ($a \neq 0$ y $b \neq 0$).

a) $\frac{a^7 \cdot a^8 : a^{10}}{(a^4 : a^5) : a^9} =$ .....

b) $\frac{a^3 \cdot b^5 : (a \cdot b)^3}{a^7 \cdot b^4} =$ .....

c) $\frac{(a^7 \cdot b^5)^2 : a^4 \cdot b^{-2}}{a^{10} \cdot b^8} =$ .....

Para leer y recordar

- **Producto de potencias de la misma base:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- **Cociente de potencias de la misma base:** $a^n : a^m = a^{n-m}$
- **Potencias sucesivas:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- **La potencia es distributiva con respecto al producto y a la división.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

17 Resuelvan las siguientes potencias de base 10 (en lo posible sin hacer cálculos).

a) $10^{-2} =$ .....

b) $10^4 =$ .....

c) $10^{-6} =$ .....

d) $10^{10} =$ .....

18 Escriban los siguientes números como potencias de base 10.

a) 1 000 000 000 = ▭

b) 10 000 000 = ▭

c) 0,00000001 = ▭

d) 100 = ▭

e) 0,001 = ▭

f) 0,1 = ▭

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Radicación de números racionales

Para leer y recordar

índice ← $\sqrt[n]{m} = r$ → raíz enésima; radical → m; radicando

- Si el índice de la raíz es par, la *raíz enésima* de un número m no negativo es el número r no negativo cuya potencia enésima es m.
- Si el índice de la raíz es impar, la *raíz enésima* de un número m es el número r cuya potencia enésima es m.

Ejemplos: $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$

$\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$

$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ porque $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

$\sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = -\frac{5}{2}$ porque $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$

Importante: Las raíces de índice par y radicando negativo no tienen solución en el campo numérico en el que estamos trabajando.

19 Calculen las raíces, cuando sea posible.

a) $\sqrt{81} =$ ____ c) $\sqrt{-\frac{16}{81}} =$ ____ e) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$ ____ g) $-\sqrt[3]{-\frac{216}{64}} =$ ____

b) $-\sqrt{4} =$ ____ d) $\sqrt[3]{-1000} =$ ____ f) $\sqrt[3]{0{,}000008} =$ ____ h) $\sqrt{0{,}0004} =$ ____

20 Resuelvan los siguientes cálculos.

a) $\sqrt{\frac{25}{16}} - \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

c) $\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 (-4) - 6 + 6 : (-3)$

.....

.....

.....

.....

b) $\sqrt[3]{33^7 : (5^2 + 2^3)^6 - 5^2} + \sqrt[5]{-6 \cdot 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$

d) $\left[\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{6}{5}\right)^2\right] : \frac{1}{2} + 2 \cdot (-10)^{-1}$

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reprodu

Módulo o valor absoluto

Para leer y recordar

- El *módulo* o *valor absoluto* de un número es la distancia entre el número y el cero en la recta numérica.
- Dos números opuestos tienen igual módulo y ningún módulo es negativo.

Ejemplos: $|2| = 2$ $|-2| = 2$ $\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$ $\left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$ $|0| = 0$

- Pueden plantearse ecuaciones con módulo, como los siguientes ejemplos.

$|x| = 4$

$x = 4$ $\quad$ $x = -4$

$|x - 5| = 2$

$x - 5 = 2$ $\quad$ $x - 5 = -2$

$x = 2 + 5$ $\quad$ $x = -2 + 5$

$x = 7$ $\quad$ $x = 3$

- La propiedad $\sqrt{a^2} = |a|$ nos va a permitir resolver nuevos tipos de ecuaciones.

21 Resuelvan los siguientes cálculos.

a) $|2 - 5| \cdot 3 + |\sqrt[3]{-27}| =$ .....

b) $-2|5 - 4| + 3 \cdot 3^3 - 4|2 - 5| =$ .....

c) $\left|\frac{1}{3} - 1\right| - 3\left|2 - \frac{1}{5}\right| =$ .....

22 ¿Cuáles son los números cuya distancia al 0 es 0,56?

.....

23 ¿Cuáles son los números cuyo módulo es igual al doble del módulo de la tercera parte de –3,9?

.....

24 ¿Es cierto que el módulo del opuesto de un número es igual al opuesto del módulo del mismo número? Justifiquen su respuesta.

.....

.....

25 Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a) $|x| = 1$ $\quad$ b) $|x + 8| = 6$ $\quad$ c) $|2x - 3| = 7$ $\quad$ d) $\left|-3x + \frac{3}{5}\right| = 0{,}8$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuaciones con números racionales

26 Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{1}{2}x + 3\left(\frac{1}{5}x - 1\right) = \frac{2}{3}x - \frac{32}{15}$

.....

.....

.....

c) $\frac{5 - 0{,}3x}{2} - \frac{2x - 1}{3} = \frac{5x - 3}{4}$

.....

.....

.....

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} + 4 + \frac{2x}{5} = \frac{x}{35} - \frac{5}{21}$

.....

.....

.....

d) $\frac{1}{2}(x - 0{,}3) - \frac{3}{5}(5x + 0{,}\widehat{5}) = \frac{x}{3}$

.....

.....

.....

27 En el $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A}$ es la mitad de $\hat{B}$, y $\hat{C}$ es un tercio de la suma entre $\hat{A}$ y $\hat{B}$. ¿Cuánto mide cada ángulo?

.....

.....

28 Mariana compró una bicicleta: pagó el 40% al contado en el momento en que se la entregaron y luego pagó cuatro cuotas, de modo tal que cada una era la mitad de la anterior. Calculen el precio de cada cuota, teniendo en cuenta que la bicicleta costó $120.

.....

.....

.....

29 La base mayor de un trapecio tiene una longitud igual a los cinco cuartos de la longitud de la base menor, y su altura mide 10 cm, y su área es 720 cm^2. Hallen la longitud de las bases.

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para observar

En los siguientes ejemplos, usamos las propiedades del módulo para resolver ecuaciones que involucran potencias de exponente par.

a) $x^2 = 9$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ → Tomamos raíz cuadrada en ambos miembros.

$|x| = 3$ → Aplicamos la propiedad $(\sqrt{a^2} = |a|)$.

$\boxed{x = 3}$ o $\boxed{x = -3}$

b) $(x - 1)^2 = 4$ → Tomamos raíz cuadrada en ambos miembros.

$\sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{4}$ → Aplicamos la propiedad.

$|x - 1| = 2$

$x - 1 = 2$ o $x - 1 = -2$ → Resolvemos cada "rama" por separado.

$x = 2 + 1$ $\quad$ $x = -2 + 1$

$\boxed{x = 3}$ $\quad$ $\boxed{x = -1}$

30 Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a) $(x - 5)^2 - 4 = 5^3 : 5^2$

b) $\dfrac{x^2 + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} + 1 = 0{,}5^{-1}$

c) $\dfrac{\sqrt{3x - 1} - 1}{2} = 1 - \dfrac{5}{4}$

d) $\dfrac{x^3 + \frac{3}{5}}{5^{-2}} - 1 = \dfrac{9^2 - 3}{5}$

e) $\dfrac{(x - 3)^2 + 1}{3} = \sqrt{\dfrac{4}{9}}$

f) $\dfrac{x^3 - 3^{-2}}{3^{-1}} = \dfrac{2x^3}{3^{-2}} + \dfrac{37}{24}$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{5^2 + 2}} + 0{,}\widehat{3} = \dfrac{2^3}{\sqrt{2^4 . 5 + 1}}$

h) $\dfrac{2^2 . 2^3 + 2^3}{3^2} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{(x - 5)^2 + 2}{4}$

31 Hallen los números tales que el cuadrado de su consecutivo sea 36.

.....

32 Ignacio tenía un cubo de madera y lo redujo, quitándole 2 cm en cada una de las aristas. Obtuvo otro cubo de 421,875 cm^3 de volumen. ¿Cuál era el volumen del cubo original?

.....

.....

33 El cuadrado del triple de un número es igual a la raíz cúbica de 46 656. ¿Cuántos y cuáles son los números que cumplen con esa condición?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los números reales

Para leer y recordar

- Los *números racionales* son los que pueden expresarse en forma de fracción. Los números naturales, los enteros, las expresiones decimales exactas y las periódicas pueden ser expresadas en forma de fracción, por lo tanto, todos ellos son números racionales.

Pero hay números que no pueden expresarse en forma de fracción, ya que su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas: los *números irracionales.*

- La unión del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales forma el conjunto $\mathbb{R}$ de los *números reales,* que "completan" la recta numérica, ya que *todos* sus puntos pueden ser representados mediante un número real.

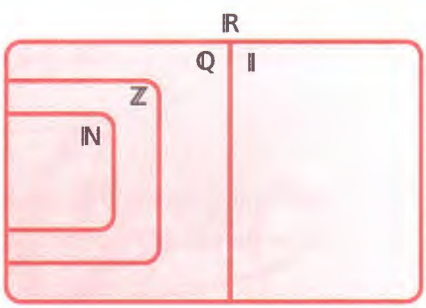
Racionales
Irracionales
} Reales

Por ejemplo, son números irracionales:

- Las raíces de números naturales cuyos resultados no son naturales: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{6}$.
- Expresiones decimales "inventadas" con cierto criterio, de modo tal que la cantidad de cifras decimales resulten infinitas y no periódicas: 0,123456...; −45,01001000100001...
- El número π (pi) = 3,14159... y el número e = 2,7182...

34 Marquen con una cruz los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número y ubiquen los números en el diagrama, cuando sea posible.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{2}$					
-8					
$-\sqrt[3]{27}$					
$0,7\widehat{8}$					
$\sqrt[3]{100}$					
6					
$\sqrt{-4}$					



35 Descubran la secuencia con la que se inventaron los siguientes números irracionales y agréguenle a cada uno 6 cifras decimales más.

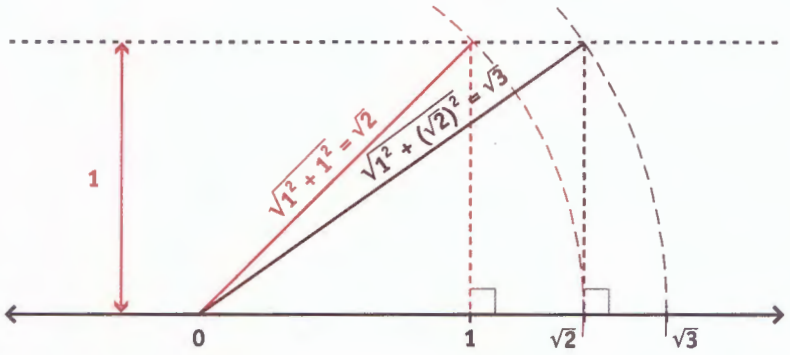
a) 7,290291292...

b) 6,55355553...

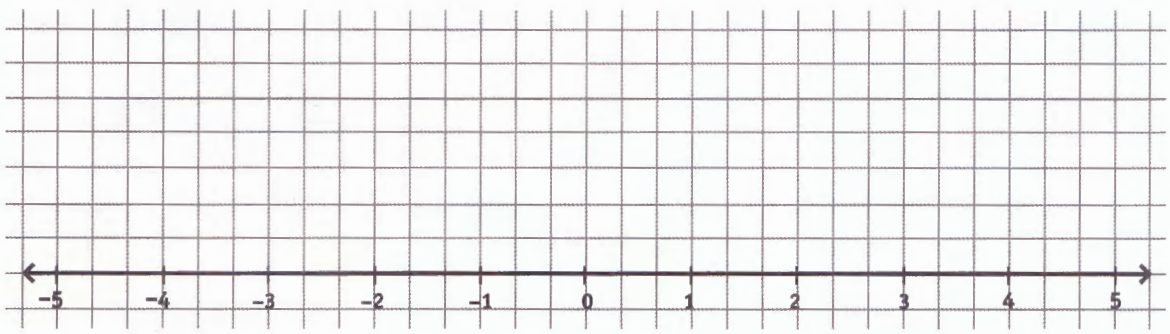
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para observar

En la figura, pueden observar una construcción geométrica mediante la cual, aplicando el Teorema de Pitágoras, se han señalado en la recta numérica los puntos correspondientes a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.



36 Utilicen regla y compás, y ubiquen en la recta los siguientes números irracionales: $\sqrt{15}$; $\sqrt{7}$; $-\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{3}$.



37 Expliquen tres procedimientos distintos para graficar $\sqrt{10}$.

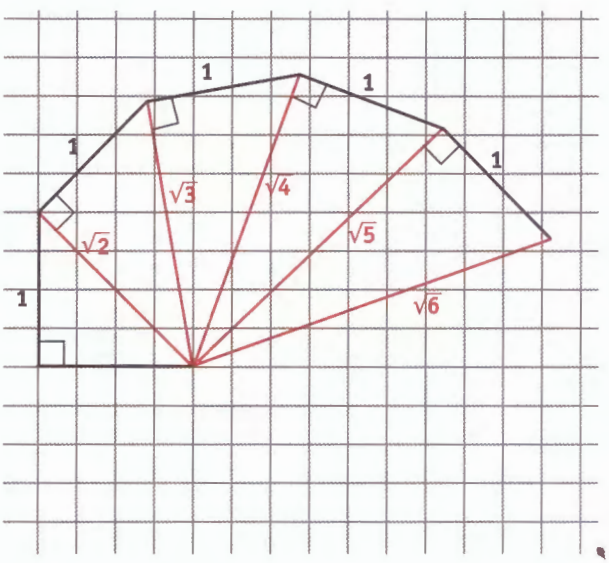
38 Observen la siguiente sucesión de triángulos rectángulos llamada *espiral de Arquímedes*.

a) Construyan dos triángulos más en la sucesión.

b) ¿En qué número de orden, la hipotenusa tiene como longitud un número natural?

.....

c) ¿En qué número de orden, aparecerán los tres próximos triángulos con hipotenusa cuya longitud sea un número natural?



.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Propiedades de la radicación

39 Resuelvan.

a) $\sqrt{9} + \sqrt{4} =$ d) $\sqrt{9 \cdot 4} =$ g) $\sqrt{36} : \sqrt{4} =$ j) $(2 + 3)^2 =$

b) $\sqrt{9 + 4} =$ e) $\sqrt{9} - \sqrt{4} =$ h) $\sqrt{36 : 4} =$ k) $2^2 \cdot 3^2 =$

c) $\sqrt{9}\sqrt{4} =$ f) $\sqrt{9 - 4} =$ i) $2^2 + 3^2 =$ l) $(2 \cdot 3)^2 =$

40 Observen los ejercicios anteriores y completen el párrafo.

La radicación y la potenciación se pueden distribuir con las operaciones .....

..... y no se pueden distribuir con las operaciones .....

.....

Para leer y recordar

Las siguientes propiedades son válidas siempre que existan todas las raíces involucradas.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[t]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[t \cdot n]{a}$

En muchos casos, estas propiedades nos facilitan la resolución de operaciones con números irracionales expresados mediante radicales. Observen algunos ejemplos.

a) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$ b) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8 : 2} = \sqrt{4} = 2$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

41 Expresen como una única raíz y resuelvan cuando el resultado sea racional.

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{343} =$ ..... d) $\sqrt{\sqrt[3]{256}} =$ .....

b) $\sqrt[5]{-2} \cdot \sqrt[5]{16} =$ ..... e) $\sqrt{\sqrt[3]{8}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{27}} =$ .....

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{7} =$ ..... f) $\dfrac{\sqrt{7}\sqrt{42}}{\sqrt{6}} =$ .....

42 Escriban un número racional que sea resultado de:

a) El cociente entre dos números irracionales. .....

b) El producto de dos números irracionales. .....

c) La suma de dos números irracionales. .....

d) La resta de dos números irracionales. .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Potencias de exponente fraccionario

Para leer y recordar

- Para cualquier par de números naturales m y n ($n \neq 1$), y cualquier $a > 0$: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplos:

$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ $\quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ $\quad \sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$

- Las potencias de exponente fraccionario conservan todas las propiedades de las potencias de exponente entero.

43 Completen la tabla.

Potencia de exponente fraccionario	$3^{\frac{1}{3}}$		$2^{\frac{3}{5}}$		$5^{\frac{3}{2}}$	
Radical		$\sqrt[3]{8^5}$		$\sqrt{7}$		$\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

44 Resuelvan y escriban el resultado como radical.

a) $\dfrac{7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{4}{6}}}{7^{\frac{5}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}} =$ .....

b) $\left(\dfrac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{10}}}{2^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} =$ .....

c) $\dfrac{(5^2 \cdot 5^5)^{\frac{1}{21}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}} =$ .....

45 Trasformen las raíces en potencias de exponente fraccionario, resuelvan las operaciones indicadas y, luego, expresen el resultado en forma de radical.

a) $\dfrac{\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^5}}{(\sqrt[3]{2^4})^{\frac{1}{2}}} =$ .....

b) $(\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[6]{7^2} : \sqrt[3]{7})^2 =$ .....

c) $\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}} =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Aproximaciones y errores

Para leer y recordar

- Si tratamos de obtener $\sqrt{2}$ con una calculadora, el visor nos mostrará 1,414213562 (la cantidad de cifras decimales depende del modelo de calculadora). Como no se pueden escribir las infinitas cifras decimales no periódicas de un número irracional, la expresión decimal que utilizamos es una *aproximación*.
- Cuando aproximamos por *truncamiento*, suprimimos las cifras posteriores a la última que nos interesa.
- Cuando aproximamos por *redondeo*, además de suprimir las cifras posteriores a la última que nos interesa, a ésta la aumentamos en una unidad si la cifra posterior es mayor o igual que 5, y la dejamos igual en caso contrario.
- Cuando aproximamos, por ejemplo, a dos decimales, decimos que cometemos un *error* menor que 10^{-2}, esto significa que la diferencia entre el valor verdadero y la aproximación es a lo sumo 10^{-2}. En general, cuando aproximamos con n decimales, decimos que cometemos un *error* menor que 10^{-n} y lo escribimos así: $\varepsilon < 10^{-n}$.

Ejemplo: aproximación de $\sqrt{5} \cong 2{,}236067977...$

	Redondeo	Truncamiento
$\varepsilon < 10^{-2}$	2,24	2,23
$\varepsilon < 10^{-3}$	2,236	2,236

46 Utilicen una calculadora y completen el cuadro aproximando por redondeo.

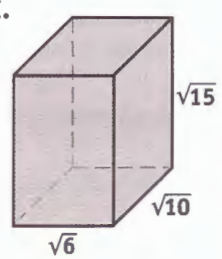
Valor exacto		Valor aproximado
$\sqrt[3]{7}$	$\varepsilon < 10^{-3}$	
$\frac{1}{7}$		0,1429
$1 + \sqrt{3}$	$\varepsilon < 10^{-5}$	

47 Las medidas indicadas en las siguientes figuras están expresadas en cm.

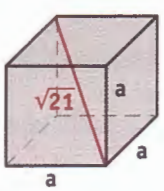
a) Hallen el valor exacto del volumen de cada cuerpo.

b) Aproximen por redondeo los valores obtenidos con $\varepsilon < 10^{-3}$.

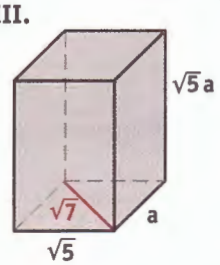
I.



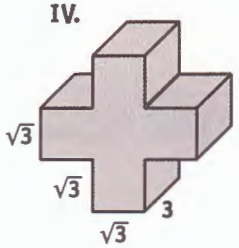
II.



III.



IV.



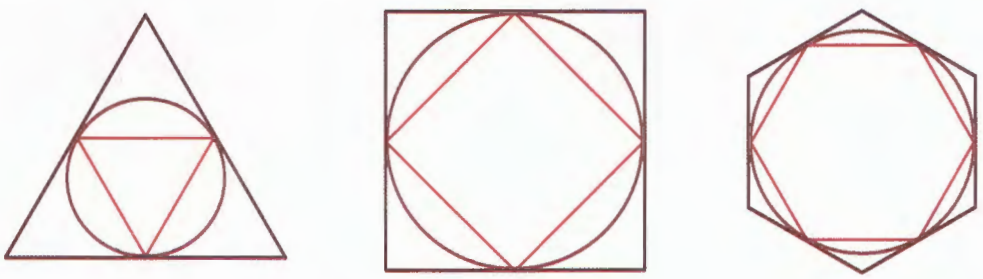
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La historia y los decimales de π

El número π ha sido y es motivo de numerosas investigaciones en la historia de la matemática.
En el papiro Rhind (del siglo XVII a. C.), en el que se hallan datos sobre la cultura egipcia de aquella época, se puede encontrar el siguiente algoritmo para calcular el área del círculo:
"Tomar el diámetro. Restar la novena parte. De esta diferencia, nuevamente la novena parte, y restar de la anterior. Multiplicar el resultado por el diámetro".

48 Según el texto anterior, ¿qué valor asignaban los egipcios a π?

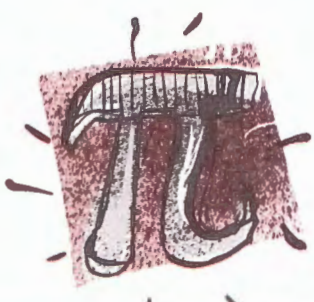
Según muchas fuentes, en el siglo III a. C. fue Arquímedes quien propuso la primera aproximación teórica del número π, basada en observaciones de polígonos inscriptos y circunscriptos en una circunferencia.



En la figura, pueden observar que, a medida que los polígonos inscriptos tienen más lados, sus perímetros se van aproximando más y más al perímetro de la circunferencia *por defecto* (con valores menores). Si consideramos los polígonos circunscriptos, también a medida que aumenta el número de lados, los perímetros de los polígonos se acercan al de la circunferencia, pero en este caso lo hacen *por exceso* (con valores mayores). A partir de este razonamiento, Arquímedes hizo cálculos y llegó a acotar el valor de π entre dos valores fraccionarios: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

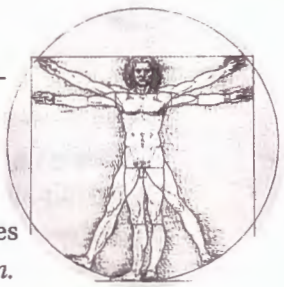
49 Teniendo en cuenta lo anterior, ¿con cuántas cifras decimales "acertó" Arquímedes en su aproximación?

Otra forma de cálculo, atribuida a Leibniz (siglo XVII), consiste en obtener sucesivas aproximaciones mediante la fórmula $\pi = 4 \cdot (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots)$.
Utilizando esta fórmula y mediante el cálculo manual, en 1699 se pudieron calcular 71 dígitos del número π.
En la actualidad, con el uso de potentes computadoras y con otros algoritmos matemáticos más complejos, se han llegado a calcular más de 206 mil millones de cifras decimales de π.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Más sobre números irracionales: el número de oro



Otro número especial entre los irracionales es el *número de oro:* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Este número era conocido por los griegos, particularmente por los seguidores de Pitágoras, quienes le atribuyeron características místicas, por calcularse como la razón entre la diagonal y un lado del pentágono regular, que era la figura que los representaba.
Se llama *rectángulo áureo* a un rectángulo en el cual la razón entre la base y la altura es el número de oro, y a dicha razón se la conoce como *razón áurea* o *divina proporción.*
Si bien no hay pruebas escritas del uso del número de oro en las construcciones arquitectónicas antiguas, en muchos monumentos griegos, se ha encontrado el rectángulo áureo. Durante el Renacimiento, al retomar las ideas de la Antigua Grecia, muchos artistas utilizaron la proporción áurea en la composición de sus obras.

Venus y Marte, Sandro Botticelli (1445-1510).

En la composición de la obra, se observan 2 rectángulos áureos superpuestos.

Para construir un rectángulo áureo con regla y compás, podemos proceder de la siguiente forma.

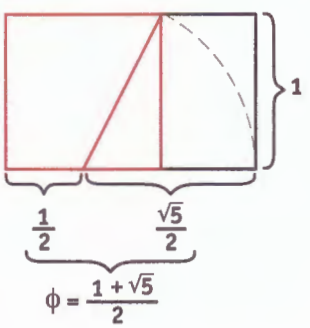
1. Construimos un cuadrado de lado 1.

2. Sobre la base hallamos el punto medio y trazamos un segmento que una este punto con el vértice opuesto del cuadrado, cuya longitud resulta:

$$l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3. Trazamos un arco de circunferencia de radio l hasta la recta que contiene a la base del cuadrado. De esta manera, nos queda sobre la base un segmento de longitud $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \phi$.

4. Con esta base y altura 1, construimos el rectángulo.



50 Utilicen la calculadora y obtengan una aproximación de ϕ redondeada a los centésimos.

51 Construyan con regla y compás un rectángulo áureo cuya altura mida 3 cm.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

52 Jaime fue al supermercado y gastó la tercera parte del dinero que llevó. A la vuelta, compró revistas en el kiosco de diarios, que le costaron la quinta parte de lo que le quedaba. Cuando llegó a su casa, contó en la billetera $40.

a) Indiquen cuál de las siguientes ecuaciones sirve para averiguar la cantidad de dinero que llevaba Jaime al salir de su casa.

I. $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 40 = x$

II. $\frac{x}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}x\right) = 40$

III. $\frac{x}{3} + \frac{1}{5}\left(x - \frac{x}{3}\right) + 40 = x$

IV. $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 40$

b) Jaime dice que recuerda que gastó $70 o $75 en el supermercado. ¿Puede ser? ¿Y con cuánto dinero salió de su casa?

53 Resuelvan los siguientes cálculos.

a)

$$\sqrt{(4,\widehat{9}-1)^2 + (0,\widehat{9}-4)^2} + 2,3 - 1,2 \cdot \sqrt{(1,21)^{-1}} =$$

b)

$$\sqrt{3 : (3^3 \cdot 3^0)} - 0,\widehat{5} + \frac{(2 \cdot 3)^3}{2 \cdot 2^2 : 3^{-5}} =$$

54 Irene utiliza una canopla como cartuchera. Las medidas de la caja son 10 cm por 5 cm por 2,5 cm.

a) Hallen la medida exacta de la diagonal de la caja.

b) ¿Se puede guardar en la caja un lápiz que mide 11,5 cm? Justifiquen la respuesta.

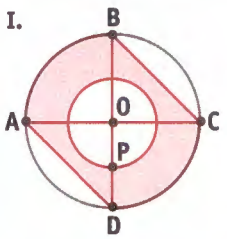
55 Un tanque cilíndrico tiene 3 m de altura y 10 m de diámetro exterior. Sus paredes son de ladrillos que tienen un espesor de 20 cm. Para llenarlo se usan camiones cisterna que transportan 5000 litros de agua. ¿Cuántos camiones se deben utilizar para llenar el tanque?

56 Hallen el área sombreada en cada figura.

a) En forma exacta.

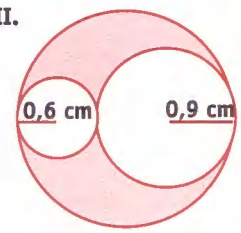
b) En forma aproximada redondeando con error menor que un milésimo.

I.

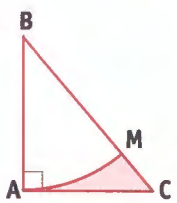


$\overline{BD} \perp \overline{AC}$
$\overline{AD} = \sqrt{10}$ cm
$\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{BO}$

II.

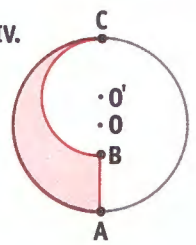


III.



$\hat{BCA} = 60°$
$\overline{BA} = \sqrt{3}$ cm
$\overline{MC} = 2 - \sqrt{3}$ cm

IV.



$\overline{AB} = \overline{BO'} = \overline{O'C}$
$\overline{CO} = \frac{3}{5}$ cm

57 Expresen en forma exacta las medidas pedidas.

a) El perímetro de una circunferencia de 3 cm de radio.

b) El área de un círculo de $5\sqrt{5}$ cm de radio.

c) El volumen y el área de una esfera de $\sqrt[3]{3}$ cm de radio.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

1 ¿Cuál es el número negativo tal que si al cuadrado de su doble se le resta la mitad del cuadrado del mismo número, el resultado da 10,5?

2 En una caja cúbica de cristal de 10 cm de lado, se colocan 200 bolitas de 0,75 cm de diámetro de distintos colores para hacer un adorno. El espacio libre se llenará con agua destilada coloreada. ¿Cuántos dm^3 de agua hay que comprar para hacer 50 adornos?

3 Simplifiquen las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{a^7 : a^4 : a^{-3}}{(a^4 \cdot a^5)^0 : a^7}$

b) $\dfrac{a^2b^4 : (b^3 : a^{-3}b^{-2})^5}{ab^5}$

4 Hallen la diagonal de un prisma cuyas medidas son $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{5}$ cm y 6 cm respectivamente.

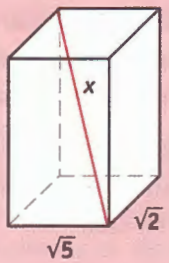
5 La base de un rectángulo mide el triple de la altura, y la diagonal mide $\sqrt{50}$ cm.

a) Calculen la superficie del rectángulo.

b) Aproximen los lados por redondeo a los centésimos.

7 Hallen el valor de x en cada figura.

a)

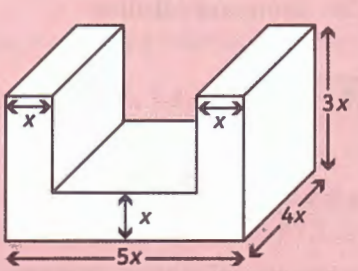


Volumen = $\sqrt{70}$ cm³

b)

Volumen = $\frac{8}{3}\pi$ cm³

c)



Volumen = 180 cm³

6 Alguno de los dos alumnos se equivocó. ¿Cuál de ellos, Inés o Facundo?

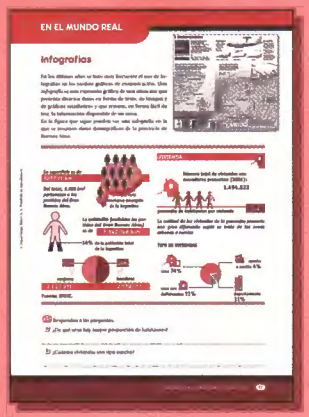
Hoy se cumplen veinte años desde que trabajo de docente. Empecé a los veinticinco.
Entonces mi edad es el doble de la raíz cuadrada de su edad más cuatro.
Y la raíz cuadrada de la suma de mi edad y la de la profesora es doce.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

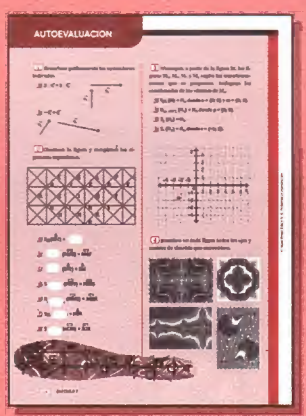
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

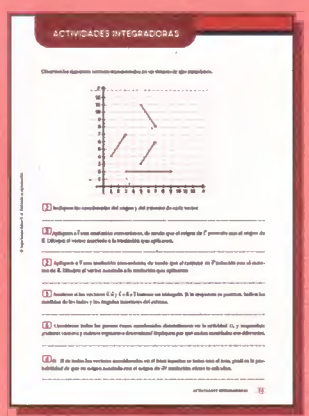


En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 5 y 7, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.

Para leer y recordar

Si n es un número natural:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$ $\qquad a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).

Para observar

Recordemos con algunos ejemplos cómo operamos con fracciones.

Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

12

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE